Discrete Mathematics 21 (1978) 201–212.

QUELQUES THEOREMES DE DUALITE COMBINATOIRE

M. SAKAROVITCH

Mathématiques Appliquées et Informatique, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, B.P. 53, 38401 Grenoble Cedex, France

Reçu le 16 decembre 1975
Revisé le 23 mars 1977

L'objet de cet article est de mettre en évidence la parenté qui unit un certain nombre de résultats de dualité dans les problèmes combinatoires (théorème des arcs colorés généralisé, théorème del la coupe minimale généralisé, théorème d'Hoffman généralisé, inégalité longueur largeur, théorème fort des écarts complémentaires) en montrant que tous ces résultats peuvent se déduire par un même type d'argument d'un "théorème fondamental de dualité linéaire" lui-même équivalent au théorème de dualité en programmation linéaire.

Aucun des résultats de cet article n'est original; le seul intérêt de cette présentation est de replacer dans une même perspective un certain nombre de théorèmes connus en donnant de chacun de ces théorèmes des démonstrations (originales) très voisines.

The purpose of this paper is to present some new and unified proofs of a number of known results in combinatorial programming: generalized versions of Minty's lemma, of Ford and Fulkerson's and Hoffman's theorems the length-width inequality and the strong complementary slackness theorem. All these results are derived from a "main duality theorem" which can be deduced from the duality theorem of linear programming or from more general results of convex analysis.

1. Introduction

L'objet de cet article est de mettre en évidence la parenté unit un certain nombre de résultats de dualité dans les problèmes combinatoires (théorème des arcs colorés généralisé, théorème de la coupe minimale généralisé, théorème d'Hoffman généralisé, inégalité longueur largeur, théorème fort des écarts complémentaires) en montrant que tous ces résultats peuvent se déduire par un même type d'argument d'un "théorème fondamental de dualité linéaire" lui-même équivalent au théorème de dualité en programmation linéaire. L'adjectif "fondamental" qui sert à qualifier notre point de départ n'est peut être pas très bien choisi dans la mesure où ce théorème n'a aucune priorité historique et où tous les résultats énoncés sont en principe équivalents. Il n'a de justification que relative dans la mesure où, pour ce papier, le résultat en question est bien un résultat-clef. Notons enfin que Bland [2] a récemment donné une généralisation combinatoire du lemme des arcs colorés généralisé à la théorie des matroïdes orientables; il conviendrait alors peut-être de considérer ce lemme comme réellement fondamental . . . .

Aucun des résultats de cet article n'est original; le seul intérêt de cette présentation est de replacer dans une même perspective un certain nombre de théorèmes connus.

Définition 1.1. Un sous-ensemble $C \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est dit *totalement ordonné* si

$$(x, y) \in C, \qquad (x', y') \in C, \qquad x < x' \Rightarrow y \leq y'$$

Un ensemble totalement ordonné maximal est appelé *courbe croissante.*

Remarque 1.2. C est une courbe croissante si et seulement si C a un point commun unique avec toute droite $y + \alpha x = b$, $\alpha > 0$, b quelconque.

Remarque 1.3. Si C est une courbe croissante $\{x\colon (xy) \in C\}$ et $\{y\colon (xy) \in C\}$ sont des intervalles,[1] disons $[\underline{x}, \bar{x}]$ et $[\underline{y}, \bar{y}]$ respectivement. De plus, on a:

$$\begin{aligned}
&\underline{x} > -\infty \Rightarrow \underline{y} = -\infty\\
&\underline{y} > -\infty \Rightarrow \underline{x} = -\infty\\
&\bar{x} < +\infty \Rightarrow \bar{y} = +\infty\\
&\bar{y} < +\infty \Rightarrow \bar{x} = +\infty
\end{aligned}$$

Définition 1.4. A une courbe croissante C, on peut faire correspondre deux fonctions monotones h_C et $g_C : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par:

$$(u, h_C(u)) \in C, \qquad (g_C(v), v) \in C.$$

D'autre part, étant donnée une fonction convexe ϕ, on peut toujours lui faire correspondre une courbe croissante C de telle sorte que ϕ s'écrive:

$$\phi(x) = \phi_C(x) = \int_{x_0}^{x} h_C(u)\, du, \quad x_0 \in [\underline{x}, \bar{x}].$$

A la fonction convexe ϕ_C associée à une courbe croissante C on attache une fonction ϕ_C^* définie par:

$$\phi_C^*(y) = \int_{y_0}^{y} g_C(v)\, dv + x_0 y_0, \quad (x_0, y_0) \in C.$$

Remarque 1.5. ϕ_C^* est une fonction convexe. De plus, on peut montrer [7] que ϕ_C et ϕ_C^* sont polaires l'une de l'autre, c'est à dire que:

$$\phi_C^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{R}} [xy - \phi_C(x)],$$

$$\phi_C(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}} [xy - \phi_C^*(y)].$$

[1] On considère ici, ainsi qu'on le fait fréquemment en optimisation convexe, la droite réelle à laquelle on adjoint les points à l'infini.

Remarque 1.6. Dans la suite de cet article, nous nous limiterons au cas "linéaire" où les courbes croissantes considérées sont constituées de segments parallèles axes, c'est à dire au cas où les fonctions h_C et g_C sont des fonctions en escalier et où les fonctions convexes ϕ_C et ϕ_C^* sont linéaires par morceaux.

Théorème 1.7 (Théorème fondamental de dualité linéaire). *Soient F et T deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires de $\mathbf{R}^m$, soient m fonctions convexes ϕ_i $(i=1,2,\ldots,m)$ linéaires par morceaux dont les polaires sont ϕ_i^* et soient C_i les courbes croissantes correspondant aux ϕ_i. On considère les deux problèmes de minimisation*:

(I) $\alpha=\min_{f\in F}\phi(f)$ *avec*

$$\phi(f)=\sum_{i=1}^{m}\phi_i(f_i)=\sum_{i=1}^{m}\phi_{C_i}(f_i),$$

(II) $\beta=\min_{t\in T}\phi^*(t)$ *avec*

$$\phi^*(t)=\sum_{i=1}^{m}\phi_i^*(t_i)=\sum_{i=1}^{m}\phi_{C_i}^*(t_i).$$

Alors:

(a) *S'il existe $f\in F$ et $t\in T$ tels que $\phi(f)<\infty$, $\phi^*(t)<\infty$, les problèmes* (I) *et* (II) *ont une solution et on a*:

(i) $\alpha+\beta=0$

(ii) *Pour tout couple de solutions $\bar f$, $\bar t$ de* (I) *et de* (II) *respectivement*: $(\bar f_i, \bar t_i)\in C_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$.

(iii) *Tout couple $\bar f\in F$, $\bar t\in T$ satisfaisant à la relation ci-dessus est un couple de solutions optimales de* (I) *et* (II).

(b) *Une condition nécessaire et suffisante pour que $\alpha=-\infty$ (resp. $\beta=-\infty$) est que* $\{t\in T\colon \phi^*(t)<\infty\}=\phi$ *(resp.* $\{f\in F\colon \phi(f)<\infty\}=\phi$).

Ce théorème est un cas particulier d'un résultat d'analyse convexe (Berge [1], Rockafellar [6]) lorsqu'on supprime dans l'énoncé la restriction que les C_i sont linéaires par morceaux. Tel qu'il est formulé ce théorème est une conséquence du théorème de dualité en programmation linéaire [8]. La démonstration correspondante est relativement longue, mais ne présente aucune difficulté. Elle utilise le procédé classique qui permet de ramener un problème d'optimisation convexe dont les contraintes sont linéaires et la fonction objective séparable et linéaire par morceaux à un programme linéaire. Nous ne la reproduisons pas ici.

Définition 1.8. Dans la suite F et T désigneront deux sous-espaces orthogonaux et supplémentaires de $\mathbf{R}^m$. A tout $x\in\mathbf{R}^m$ on associe:

$$S(x)=\{i\colon\ x_i\neq 0\}$$

dit *support de x*. $x \in F$ sera dit *vecteur élémentaire de F* si

$$\left.\begin{array}{l} x' \in F \\ S(x') \subset S(x) \text{ (inclusion stricte)} \end{array}\right\} \Rightarrow x' = 0$$

c'est à dire qu'un vecteur est élémentaire s'il est à support minimal.

Soient $x, y \in \mathbf{R}^m$. On dit que x est conforme à y si

$$x_i \neq 0 \Rightarrow x_i y_i > 0.$$

Donc:

$$x \text{ conforme à } y \Rightarrow S(x) \subset S(y).$$

Remarque 1.9. On démontre (cf. [3] et [6]) que $\forall f \in F$, on peut écrire:

$$f = f^1 + f^2 + \cdots + f^k$$

où les f^j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ sont des vecteurs élémentaires de F conformes à f.

2. Théorèmes de dualité combinatoire

(A) *Théorème de dualité en programmation linéaire.* Etant donnés deux programmes linéaires duaux:

$$(P)\begin{cases} Ax = b, \quad x \geqslant 0 \\ cx = z \text{ (min)} \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \Pi^T A \leqslant c \\ \Pi^T b = w \text{ (max)} \end{cases}$$

(i) Si les deux problèmes admettent une solution réalisable, ils admettent l'un et l'autre une solution optimale et $z_{\min} = w_{\max}$.

(ii) Si l'un des problèmes possède une classe de solutions pour laquelle la valeur de la fonction objective n'est pas bornée, l'autre ne possède pas de solution réalisable.

(iii) Si (P) (resp. (D)) possède une solution réalisable mais pas (D) (resp. (P)), alors (P) (resp. (D)) possède une classes de solutions réalisables telle que la fonction objective n'est pas bornée.

(B) *Lemme des arcs colorés généralisé.* Supposons qu'on ait affecté l'une des couleurs Noir, Rouge ou Vert aux indices $i = 1, 2, \ldots, m$, l'indice 1 ayant reçu la couleur Noire (on rappelle que F et T sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires de $\mathbf{R}^m$). L'une et l'une seulement des deux propositions suivantes est vraie:

(a) Il existe un vecteur élémentaire $f \in F$ tel que:

$$f_1 > 0,$$

$S(f)$ ne contienne que des indices rouges et noirs, les indices noirs de $S(f)$ sont dans $S^+(f) = \{i: f_i > 0\}$.

(b) Il existe un vecteur élémentaire $t \in T$ tel que:

$$t_1 > 0,$$

$S(t)$ ne contient que des indices verts et noirs, les indices noirs de $S(t)$ sont dans $S^+(t) = \{i\colon t_i > 0\}$.

(C) *Théorème de la coupe minimale généralisé.* Supposons qu'on ait associé à chaque indice $i = 2, 3, \ldots, m$ une "capacité" $c_i \in \mathbf{R}^+$. Tout vecteur $t \in T$ tel que $t_1 = -1$ sera appelé une "coupe". La capacité d'une coupe étant

$$c(t) = \sum_{i=2}^{m} |c_i t_i|$$

$f \in F$ sera appelé un flot et f_1 sera "la valeur" de ce flot. Alors:

$$\max_{\{f \in F\colon |f_i| \le c_i\, i=2,3,\ldots,m\}} [f_1] = \min_{\{t \in T\colon t_1 = -1\}} [c(t)]$$

(D) *Théorème d'Hoffman généralisé.* Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in F$ tel que:

$$b_i \le f_i \le c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad b_i, c_i \in \mathbf{R}; b_i \le c_i$$

est que pour tout vecteur élémentaire $t \in T$ on ait:

$$\sum_{\{i\colon t_i > 0\}} c_i t_i + \sum_{\{i\colon t_i < 0\}} b_i t_i \ge 0 \tag{1}$$

(E) *Inégalité longueur-largeur.* Associons à chaque indice $i = 2, 3, \ldots, m$ une longueur $l_i \in \mathbf{R}^+$ et une largeur $w_i \in \mathbf{R}^+$. Posons:

$$\lambda = \min_{\{f \in F\colon f_1 = 1\}} \sum_{i=2}^{m} |f_i|\, l_i$$

$$\omega = \min_{\{t \in T\colon t_1 = 1\}} \sum_{i=2}^{m} |t_i|\, w_i$$

alors on a l'inégalité:

$$\lambda\omega \le \sum_{i=2}^{m} l_i w_i$$

3. Démonstrations des théorèmes de dualité combinatoire

Dans toutes ces démonstrations, on se ramène, par un choix judicieux des courbes C_i, à un cas d'application du théorème fondamental de dualité linéaire.

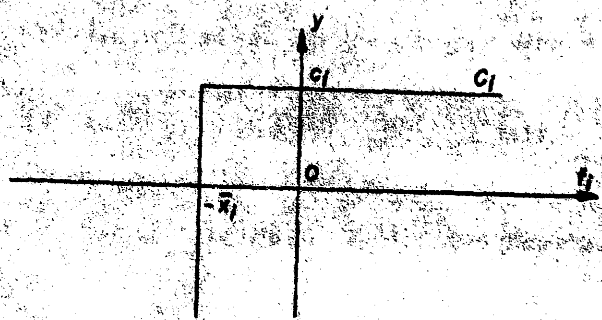
(A) Supposons que le système $Ax=b$ ait une solution $\bar{x}$. Posant $f=x-\bar{x}$ (P) s'écrit:

$$(P)\begin{cases} Af=0, \\ cf+c\bar{x}=z\ (\min) \end{cases} \qquad f\geqslant -\bar{x}.$$

Soit F le noyau de l'application linéaire définie par la matrice A, T le sous-espace vectoriel orthogonal et supplémentaire:

$$T=\{y;\ y=A^T\Pi\}$$

A chacune des m colonnes de A, on associe la courbe croissante C_i définie comme ci-dessous:



Les fonctions ϕ_i sont alors données par:

$$\phi_i(f_i)=\begin{cases} +\infty & \text{si } f_i<-\bar{x}_i, \\ c_i(f_i+\bar{x}_i) & \text{si } f_i\geqslant -\bar{x}_i, \end{cases}$$

et on vérifie que (I) est équivalent à (P). D'autre part (II) s'écrit:

$$\text{(II)}\begin{cases} y\in T, \\ \sum_{i=1}^{m}\phi_i^*(y_i)=w'\ (\min), \end{cases}$$

avec:

$$\phi_i^*(y_i)=\begin{cases} -\bar{x}_iy_i & \text{si } y_i\leqslant c_i, \\ +\infty & \text{si } y_i>c_i. \end{cases}$$

Donc le problème (II) s'écrit:

$$\text{(II')}\begin{cases} y^T=\Pi^TA\leqslant c, \\ -y^T\bar{x}=w'\ (\min) \end{cases}$$

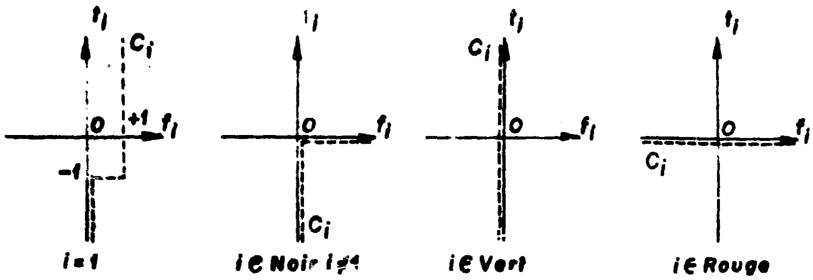
et, en tenant compte de ce que $A\bar{x}=b$, (II') s'écrit:

$$\text{(D')}\begin{cases} \Pi^TA\leqslant c \\ -\Pi^Tb=w'\ (\min) \end{cases}$$

qui est, au signe près de la fonction objective, le dual de (P). Le théorème de dualité (ainsi que le théorème faible des écarts complémentaires) en programmation linéaire est alors une conséquence directe du théorème fondamental de dualité linéaire.

(B) Les deux termes de l'alternative sont mutuellement exclusifs. En effet, sinon on aurait mis en évidence un couple $f \in F$, $t \in T$ avec $f^T t > 0$.

Associons auc différentes composantes les courbes croissantes en escalier **suivantes:**



On définit à partir des courbes C_i les problèmes (I) et (II) auxquels on peut **appliquer le théorème fondamental de dualité** linéaire. Comme $\phi(0) < \infty$ et **$\phi^*(0) < \infty$, il existe un couple $\bar{f}$, $\bar{t}$ de solutions optimales des problèmes (I) et (II):**

(a) Si $\bar{f}_1 > 0$,

$$i \in S(\bar{f}) \Rightarrow i \text{ est noir ou rouge,}$$

$$i \in S(\bar{f}) \text{ et } i \text{ est noir} \Rightarrow \bar{f}_i > 0.$$

D'après la Remarque 1.9, il existe $\hat{f}$ élémentaire, conforme à $\bar{f}$ et tel que $\hat{f}_1 > 0$.

(b) Si $\bar{t}_1 < 0$,

$$i \in S(\bar{t}) \Rightarrow i \text{ est noir ou vert,}$$

$$i \in S(\bar{t}) \text{ et } i \text{ est noir} \Rightarrow \bar{t}_i < 0.$$

D'après la Remarque 1.9, il existe $\hat{t}$ élémentaire conforme à $\bar{t}$ et tel que $\hat{t}_1 < 0$. $-\hat{t}$ satisfait aux énoncés.

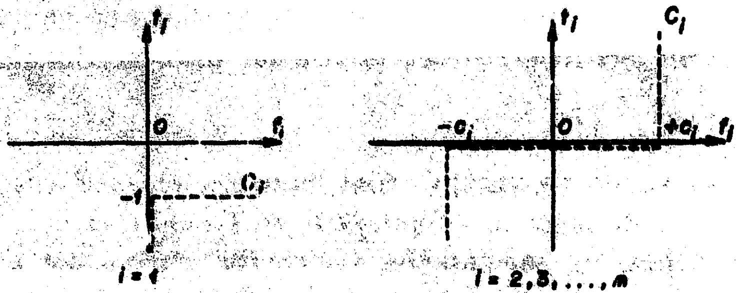
(C) Soit $f \in F$ tel que $-c_i \leq f_i \leq c_i$, $i = 2, \ldots, m$, et soit $t \in T$ tel que $t_1 = -1$. On a:

$$t^T f = t_1 f_1 + \sum_{i=2}^{m} t_i f_i = 0$$

$$f_1 = \sum_{i=2}^{m} t_i f_i \leq \sum_{i=2}^{m} |t_i| \, c_i = c(t). \tag{2}$$

Il faut exhiber un $t \in T$ et un $f \in F$ tels que l'égalité soit vérifiée dans (2).

Associons auc différentes composantes les courbes croissantes:



On définit à partir des courbes C_i les problèmes (I) et (II) auxquels on peut appliquer le théorème fondamental de dualité linéaire.

$\phi(0)<\infty$; si t est une coupe $\phi^*(t)<\infty$, donc s'il existe une coupe alors les problèmes (I) et (II) possèdent un couple de solutions optimales $\bar{f}$, $\bar{t}$ pour lequel, d'après a, (ii):

$$\bar{t}_i>0 \Rightarrow \bar{f}_i=c_i,$$

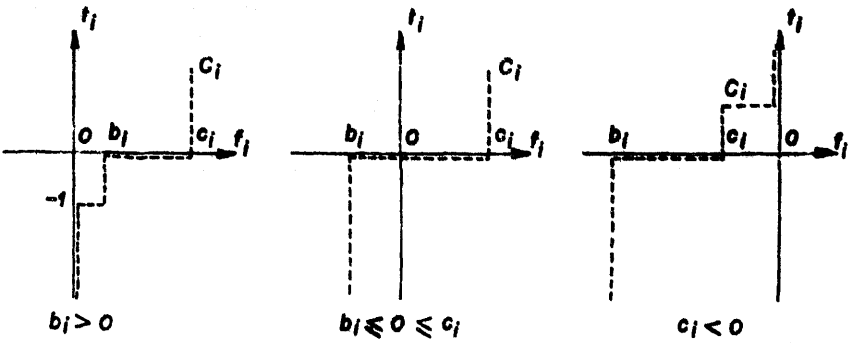
$$\bar{t}_i<0 \Rightarrow \bar{f}_i=-c_i,$$

donc pour le couple $\bar{f}$, $\bar{t}$, (2) est vérifiée avec le signe $=$. S'il n'existe pas de coupe: $\sup(f_1)=+\infty$.

(D) La condition (1) est certainement nécessaire. En effet $\forall t \in T$ on a:

$$0=\sum_{\{i:\ t_i>0\}} t_i f_i+\sum_{\{i:\ t_i<0\}} t_i f_i \leqslant \sum_{\{i:\ t_i>0\}} t_i c_i+\sum_{\{i:\ t_i<0\}} t_i b_i$$

Pour démontrer le caractère suffisant de (1) associons aux différentes composantes les courbes croissantes suivantes:



On définit à partir des courbes C_i les problèmes (I) et (II) auxquels on peut appliquer le théorème fondamental de dualité linéaire. Comme $\phi(0)<\infty$ et $\phi^*(0)<\infty$, il existe un couple $\bar{f}$, $\bar{t}$ de solutions optimales des problèmes (I) et (II). Supposons par ailleurs qu'il n'existe pas de $f \in F$ tel que $b_i \leqslant f_i \leqslant c_i$, $i=1, 2, \dots, m$. On a alors nécessairement: $\bar{f}_i<b_i$ ou $\bar{f}_i>c_i$ pour au moins un $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

D'autre part:

$$\bar{t}^T\bar{f} = 0 = \sum_{i=1}^{m} \bar{t}_i\bar{f}_i = \sum_{\{i:\ t_i>0\}} \bar{t}_i\bar{f}_i + \sum_{\{i:\ t_i<0\}} \bar{t}_i\bar{f}_i$$

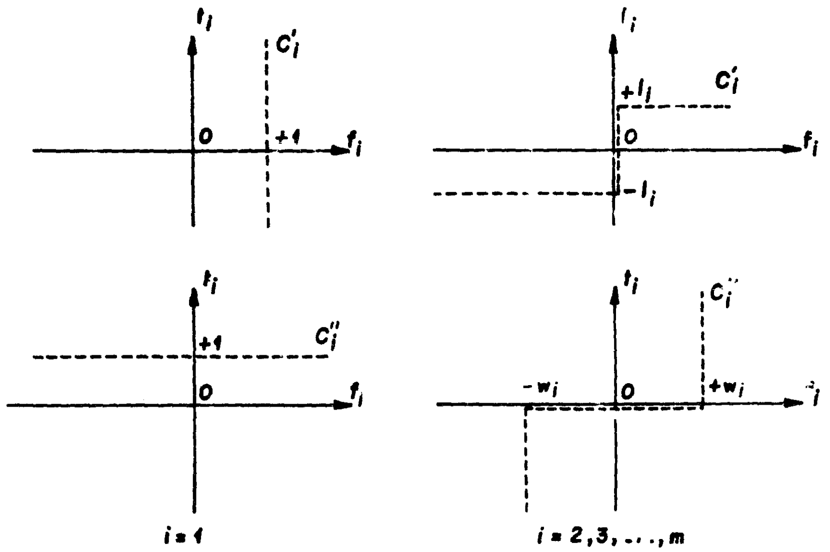
Or, d'après les courbes choisies et a(ii) on a:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{t}_i > 0 \Rightarrow \bar{f}_i \geq c_i \\ \bar{t}_i < 0 \Rightarrow \bar{f}_i \leq b_i \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{avec l'inégalité stricte} \\ \text{pour au moins un indice.}\end{array}$$

Donc

$$0 > \sum_{\{i:\ t_i>0\}} \bar{t}_i c_i + \sum_{\{i:\ t_i<0\}} \bar{t}_i b_i$$

(E) On considère les deux ensembles de courbes croissantes:



On définit à partir des courbes C'_i (resp. C''_i) les problèmes (I′) (II′) (resp. (I″) (II″)) auxquels on peut appliquer le théorème fondamental de dualité linéaire. Si on suppose que:

$$\{f \in F:\ f_1 = 1\} \neq \emptyset, \qquad \{t \in T:\ t_1 = 1\} \neq \emptyset,$$

les problèmes (I′) et (II′) (resp. (I″) et (II″) admettent un couple de solutions optimales $\bar{f}'$, $\bar{t}'$ (resp. $\bar{f}''$, $\bar{t}''$).

D'autre part, les problèmes (I′) et (II″) s'écrivent:

$$\text{(I')} \quad \min_{\{f\in F:\ f_1=1\}} \sum_{i=2}^{m} |f_i|\, l_i,$$

$$\text{(II'')} \quad \min_{\{t\in T:\ t_1=1\}} \sum_{i=2}^{m} |t_i|\, w_i$$

et par conséquent:

$$\lambda = \sum_{i=2}^{m} |\bar{f}_i'| \, l_i,$$

$$\omega = \sum_{i=2}^{m} |\bar{t}_i''| \, w_i.$$

Or:

$$0 = \bar{f}_1' \bar{t}_1' + \sum_{i=2}^{m} \bar{f}_i' \bar{t}_i',$$

$$\bar{f}_i' > 0, \quad \bar{t}_i' = l_i,$$

$$\bar{f}_i' < 0, \quad \bar{t}_i' = -l_i$$

et comme $\bar{f}_1' = 1$, on en déduit $\bar{t}_1' = -\lambda$. On montrerait de même que $\bar{f}_1'' = -\omega$. Enfin:

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \bar{f}_i'' \bar{t}_i' = \bar{f}_1'' \bar{t}_1' + \sum_{i=2}^{m} \bar{f}_i'' \bar{t}_i',$$

avec

$$-w_i \leqslant \bar{f}_i'' \leqslant w_i,$$

$$-l_i \leqslant \bar{t}_i' \leqslant l_i$$

soit:

$$\lambda\omega = -\sum_{i=2}^{n} \bar{f}_i'' \bar{t}_i' \leqslant \sum_{i=2}^{n} w_i l_i.$$

On montre finalement comment le théorème for des écarts complémentaires en programmation linéaire peut se déduire du lemme des arcs colorés généralisé.

Théorème 2.1 (Théorème fort des écarts complémentaires). *Soit un couple de programmes linéaires duaux*:

$$(P)\begin{cases} Ax = b, \\ cx = z \text{ (min)} \end{cases} \quad x \geqslant 0 \qquad (D)\begin{cases} yA \leqslant c \\ yb = w \text{ (max)} \end{cases}$$

tels que:

$$\{x:\ Ax = b, x \geqslant 0\} \neq \emptyset$$

$$\{y:\ yA \leqslant c\} \neq \emptyset$$

Alors il existe un couple de solutions optimales de (P) et de (D) $\bar{x}, \bar{y}$ tels que:

$$\bar{x}_i = 0 \Rightarrow = \bar{y}A^i < c^i,$$

$$\bar{y}A^i = c^i \Rightarrow \bar{x}_i > 0.$$

Démonstration. Soit $\bar{x}$, $\bar{y}$ un couple de solutions optimales de (P) et (D) respectivement tel que:

$$K=\{i:\ \bar{y}A^i=c^i \text{ et } \bar{x}_i=0\}$$

soit de cardinal minimum. Supposons que la propriété annoncée soit fausse et donc que $|K|>0$. On pose:

$$I=\{i:\ \bar{y}A^i=c^i\},\qquad J=\{i:\ \bar{x}_i=0\}.$$

D'après le théorème (faible) des écarts complémentaires on a:

$$I\cup J=\{1,2,\ldots,m\}$$

D'autre part, par définition:

$$K=I\cap J$$

On colore les indices $i=1,2,\ldots,m$ de la manière suivante:

(a) Les indices de K en noirs (sans perte de génfalité on suppose $1\in K$).

(b) Les indices de I–J en rouge.

(c) Les indices de J–I en vert.

Et on pose:

$$F=\{f\in R^m:\ Af=0\},$$
$$T=\{t\in R^m:\ t=yA\}.$$

D'après le lemme des arcs colorés généralisé, il existe soit:

(i) $\hat{f}\in F$, $\hat{f}$ élémentaire, $S(\hat{f})\in I\cup K$, $S(\hat{f})\cap K\subset S^+(\hat{f})$

(ii) $\hat{t}\in T$, $\hat{t}$ élémentaire, $S(\hat{t})\subset J\cup K$, $S(\hat{t})\cap K\subset S^+(\hat{t})$.

Dans le cas (i), soit ε' la valeur maximum de ε pour laquelle

$$\bar{x}+\varepsilon\hat{f}\geqslant 0.$$

Il est clair que $\varepsilon'>0$ et

$$\bar{x}'=\bar{x}+\varepsilon'\hat{f}$$

est une solution optimale de (P) ($\bar{x}'$, $\bar{y}$ satisfait les conditions du théorème faible des écarts complémentaires). Si on pose:

$$K'=\{i:\ \bar{y}A^i=c^i \quad\text{et}\quad \bar{x}'_i=0\}$$

on a $|K'|<|K|$, une contradiction.

Dans le cas (ii), soit η' la valeur maximum de η pour laquelle

$$\bar{y}A+\eta\hat{t}=\bar{y}A+\eta\hat{y}A\leqslant c.$$

Il est clair que $\eta'>0$ et que

$$\bar{y}'=\bar{y}+\eta'\hat{y}$$

est une solution optimale de (D). On pose:

$$K' = \{i:\ \bar{y}'A^i = c^i \quad \text{et} \quad \bar{x}_i = 0\}$$

et on aboutit à la même contradiction que ci-dessus.

References

[1] C. Berge, A. Ghouila Houri, Programmes, jeux et réseaux de transport (Dunod, Paris, 1962).

[2] R. Bland, Complementary orthogonal subspaces of $\mathbf{R}^n$ and orientability of matroids, Thesis, Cornell University.

[3] P. Camion, Application d'une généralisation du lemme de Minty à un problème d'infimum de fonction convexe. Cahiers Centre Etudes Recherche Opér. (3–4) (1965).

[4] D.R. Fulkerson, Networks, frames, blocking systems, in : G.B. Dantzig and A.F. Veinott Jr., eds., Mathematics of the Decision Sciences, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 11 (Am. Math. Soc., Providence, RI, 1968) 303–335.

[5] G.J. Minty, A "from scratch" proof of a theorem of Rockafellar and Fulkerson, Math. Programming 7 (1974) 368–375.

[6] R.T. Rockafellar, The elementary vectors of a subspace of $\mathbf{R}^N$, Proc. of Chapel Hill Symp. on Combinatorial Math. and Application (1968).

[7] R.T. Rockafellar, Convex Analysis (Princeton University Press, 1970).

[8] M. Sakarovitch, Sur quelques problèmes d'optimisation combinatoire, Thèse présentée à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble (1975).